GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

GV: Trần Minh Ngọc

Nhóm giáo viên tiếp sức Chinh phục kỳ thi THPT 2020

Trong đề tham khảo của Bộ GD lần 1 và lần 2, cũng như đề thi thử của các sở giáo dục, các trường phổ thông năm 2020 thường có bài toán liên quan đến GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu trị tuyệt đối. Để giải quyết được các dạng toán này các em cần ghi nhớ bài toán tổng quát sau:

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$. Tìm GTLN-GTNN của hàm số trên đoạn $\left[a;b\right]$

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm $\max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=p;\ \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=q.$

Bước 2: Xét các khả năng

- Nếu $p.q\le 0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|=0\\ \max\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|=\max\left\{\left|p\right|;\left|q\right|\right\}\end{cases}.$
- Nếu $q>0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|=q\\ \max\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|=p\end{cases}.$
- Nếu $p<0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|p\right|=-p\\ \max\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|=\left|q\right|=-q\end{cases}.$

Chú ý công thức tính nhanh:

$$\max\limits_{[a;b]}\left|f(x)\right|=\frac{\left|p+q\right|+\left|p-q\right|}{2};\quad \min\limits_{[a;b]}\left|f(x)\right|=\begin{cases}0,\text{nếu } p.q\le 0\\ \dfrac{\left|p+q\right|-\left|p-q\right|}{2},\text{nếu } p.q>0\end{cases}.$$

Tùy theo từng bài toán cụ thể mà ta áp dụng cho hợp lý nhất. Sau đây chúng ta sẽ áp dụng cho 3 dạng thường gặp nhất.

Dạng 1: *Tìm tham số để* $\left[\begin{array}{l}\min\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|\le k\left(\ge k\right)\\ \max\limits_{[a;b]}\left|f\left(x\right)\right|\le k\left(\ge k\right)\end{array}\right.$.

Ví dụ mẫu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^4-2x^2-m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -2. **B.** 7. **C.** 14. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x)=x^4-2x^2-m$ trên đoạn $[-1;2]$ có $f'(x)=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=0\in[-1;2] \\ x=-1\in[-1;2] \end{array}\right.$.

Khi đó $f(0)=-m;\ f(\pm1)=-m-1;\ f(2)=-m+8$.

Suy ra: $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=-m+8$ và $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=-m-1$.

- Nếu $(-1-m)(8-m)\le 0 \Leftrightarrow -1\le m\le 8$ thì $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=0$, không thỏa mãn đề bài.
- Nếu $-m-1>0 \Leftrightarrow m<-1$ thì $\min\limits_{[-1;2]} y=|-m-1|=-m-1$

Khi đó $-m-1=2 \Leftrightarrow m=-3(t/m)$.

Nếu $-m+8<0 \Leftrightarrow m>8$ thì $\min\limits_{[-1;2]} y=|-m+8|=m-8$; khi đó $m-8=2 \Leftrightarrow m=10(t/m)$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của bằng 7.

Ví dụ mẫu 2: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2-mx+2m}{x-2}\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $-\dfrac{8}{3}$. **B.** 5. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-mx+2m}{x-2}$ trên $[-1;1]$ có $f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-2)^2}$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \notin [-1;1] \end{array}\right.$; $f(-1)=-m-\dfrac{1}{3}$; $f(0)=-m$; $f(1)=-m-1$.

Suy ra: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=-m$ và $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-m-1$.

- Nếu $-m(-m-1)\le 0 \Leftrightarrow -1\le m\le 0$; $\max\limits_{[-1;1]} y=\{|-m-1|;|-m|\}=\{m+1;-m\}$.

  Có hai khả năng $\left[\begin{array}{l} 3=-m \\ 3=m+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=2 \end{array}\right.$, không thỏa mãn.

- Nếu $f(0)=-m<0 \Leftrightarrow m>0$. Khi đó $\max\limits_{[-1;1]} y=|-m-1|=m+1$

$\Rightarrow m+1=3 \Leftrightarrow m=2\,(t/m)$

- Nếu $-m-1>0 \Leftrightarrow m<-1$. Khi đó $3=\max\limits_{[-1;1]}|f(x)|=f(0) \Leftrightarrow m=-3$.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1=-3,\ m_2=2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1.

Ví dụ mẫu 3: Cho hàm số $y=|x^3-x^2-x+m|$ với $m\in\mathbb{Z}$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{[1;3]} y<3$?

A. 21. **B.** 22. **C.** 4. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2-x+m;\ x\in[1;3]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[1;3] \\ x=-\dfrac{1}{3}\notin[1;3] \end{array}\right.$

Ta có $f(1)=m-1,\ f(3)=m+15$.

Suy ra $\min\limits_{[1;3]} f(x)=m-1;\ \max\limits_{[1;3]} f(x)=m+15$.

- Nếu $(m-1)(m+15)\le 0 \Leftrightarrow -15\le m\le 1$; $\min\limits_{[1;3]} y=0<3$. Trường hợp này có 17 số nguyên thỏa mãn.
- Nếu $m-1>0 \Leftrightarrow m>1$; $\min\limits_{[1;3]} y=m-1<3 \Rightarrow 1<m<4$. Trường hợp này có 2 số nguyên thỏa mãn.

- Nếu $m+15<0 \Leftrightarrow m<-15$; $\min\limits_{[1;3]} y=|m+15|<3 \Rightarrow -m-15<3 \Rightarrow -18<m<-15$. Trường hợp này có 2 số nguyên thỏa mãn.

  Vậy có tất cả 21 số nguyên thỏa mãn.

Bài tập tự luyện:

Câu 1. (Chuyên BN lần 2) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=|x^4+4x^3-m|$ trên đoạn $[-4;-2]$ bằng 2020 ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 2. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+3m}{x+3}\right|$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 5. Gọi T là tổng tất cả các phần tử của S. Tính T.

A. $T=4$. **B.** $T=-5$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+mx+3m}{x+3}$, hàm số luôn xác định trên tập đang xét.

$$f'(x)=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=0 \Rightarrow x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array}\right.$$

Ta có: $f(-2)=m+4$; $f(0)=m$; $f(2)=m+\dfrac{4}{5}$.

Với $g(x)=|f(x)|=\left|\dfrac{x^2+mx+3m}{x+3}\right|$. Ta có $\max\limits_{[-2;2]} g(x)=\max\left\{|f(-2)|;|f(0)|\right\}$.

Xét $m(m+4)\le 0 \Leftrightarrow -4\le m\le 0$ thì $\left[\begin{array}{l} -m=5 \\ m+4=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=1 \end{array}\right.$ (loại) .

Xét với $m>0$. Ta có $\max\limits_{[-2;2]} g(x)=|f(-2)|=|m+4|=m+4=5 \Rightarrow m=1$.

Xét với $m<-4$, ta có $\max\limits_{[-2;2]} g(x)=|f(0)|=|m|=-m=5 \Rightarrow m=-5$.

Vậy $S=\{-5;1\}$ nên tổng $T=(-5)+1=-4$.

Câu 3. Cho S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|-x^4+2x^2+m\right|+1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 6. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 7. **B.** 17. **C.** -3. **D.** -7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=-x^4+2x^2+m$ trên $[0;2]$.

Ta có $g'(x)=-4x^3+4x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;2] \\ x=1\in[0;2] \\ x=-1\notin[0;2] \end{array}\right.$

Ta có $f(0)=|m|+1;\ f(1)=|m+1|+1;\ f(2)=|m-8|+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \max\limits_{[0;2]} f(x)=|m+1|+1 \\ \max\limits_{[0;2]} f(x)=|m-8|+1 \end{array}\right.$

+) Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=|m+1|+1 \Rightarrow \begin{cases} |m+1|+1=6 \\ |m+1|\ge|m-8| \end{cases} \Leftrightarrow m=4$

+) Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=|m-8|+1 \Rightarrow \begin{cases} |m-8|+1=6 \\ |m-8|\ge|m+1| \end{cases} \Leftrightarrow m=3$

Vậy tổng các giá trị của m bằng 7.

Câu 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|x^2-3x+2+m\right|$ thỏa mãn $\min\limits_{[-2;\,2]} y=5$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{47}{4}$. **B.** -10. **C.** $\dfrac{-31}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=x^2-3x+2+m$ trên đoạn $[-2;2]$, có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

$\max\limits_{[-2;2]} g(x) = \max\left\{g(-2), g\left(\frac{3}{2}\right), g(2)\right\} = m+12$;

$\min\limits_{[-2;2]} g(x) = \min\left\{g(-2), g\left(\frac{3}{2}\right), g(2)\right\} = m-\frac{1}{4}$.

Nếu $m-\frac{1}{4} \geq 0$ hay $m \geq \frac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = m-\frac{1}{4} = 5 \Leftrightarrow m = \frac{21}{4}$ (thỏa mãn).

Nếu $m+12 \leq 0$ hay $m \leq -12$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = -m-12 = 5 \Leftrightarrow m = -17$ (thỏa mãn).

Nếu $-12 < m < \frac{1}{4}$ thì $\min\limits_{[-2;\,2]} y = 0$ (không thỏa mãn).

Ta có: $S = \left\{-17; \frac{21}{4}\right\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-\frac{47}{4}$.

Câu 5. Có tất cả bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;2]$ bằng 10.

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Suy ra $\min\limits_{[-32;243]} f(t) = \min\{-32+m; 243+m\}$

Nếu $(243+m)(-32+m) \leq 0$ suy ra a $\min\limits_{[-32;243]} y = \min\limits_{[-32;243]} |f(t)| = 0$, không thỏa mãn

Yêu cầu bài toán $\min\limits_{[-32;243]} y = 10$ suy ra điều kiện cần là $(243+m)(-32+m) > 0$

TH1: $m > 32 \Rightarrow \min\limits_{[-32;243]} y = |-32+m| = 10 \Leftrightarrow m - 32 = 10 \Leftrightarrow m = 42$.

TH2: $m < -243 \Rightarrow 10 = \min\limits_{[-32;243]} y = |243+m| = -m-243 \Leftrightarrow m = -253$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa yêu cầu.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \left|\frac{x^2 - mx + 2m}{x-2}\right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[-1;1]} f(x) \leq 5$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. -11. **B.** 9. **C.** -5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-mx+2m}{x-2}$ $\Rightarrow g'(x)=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Khi $x=0\Rightarrow g(0)=-m$.

Ta có $g(-1)=\dfrac{1}{3}(-3m-1)=-m-\dfrac{1}{3}$; $g(1)=\dfrac{1+m}{-1}=-1-m$.

Mà $-1-m<-\dfrac{1}{3}-m<-m$.

Suy ra $\underset{[-1;1]}{max}\, f(x)=max\left\{|m|,|m+1|,\left|m+\dfrac{1}{3}\right|\right\}=max\{|m|,|m+1|\}$

Trường hợp 1: $\begin{cases}|m+1|\ge|m|\\|m+1|\le5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-\dfrac{1}{2}\\-6\le m\le4\end{cases}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4\}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases}|m+1|<|m|\\|m|\le5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{1}{2}\\-5\le m\le5\end{cases}\Rightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Suy ra tổng các phần tử của S bằng -5..

Dạng 2: *Tìm tham số để* $\alpha.\underset{[a;b]}{\min}|f(x)|\pm\beta.\underset{[a;b]}{\max}|f(x)|\le k,(\ge k)$..

Ví dụ mẫu 1: Cho hàm số $y=x^3-3x+m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho $\underset{[0;2]}{\min}|y|+\underset{[0;2]}{\max}|y|=6$. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=x^3-3x+m,\ x\in[0;2]$

$y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1(l)\end{array}\right.$

Ta có: $y(0)=m;\ y(1)=m-2; y(2)=m+2$.

Suy ra: $\underset{[0;2]}{\min}\, y=m-2;\ \underset{[0;2]}{\max}\, y=m+2$.

TH 1: $(m+2)(m-2)\le0\Rightarrow-2\le m\le2$.

$\Rightarrow\underset{[0;2]}{\min}|y|=0,\ \underset{[0;2]}{\max}|y|=\{|m-2|;|m+2|\}$.

$\Rightarrow\underset{[0;2]}{\min}|y|+\underset{[0;2]}{\max}|y|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0+2-m=6\\m+2=6\end{array}\right.\Leftrightarrow m=\pm4$, không thỏa mãn.

TH 2: $m-2>0 \Leftrightarrow m>2 \Rightarrow \min\limits_{[0;2]}|y|=|m-2|=m-2, \max\limits_{[0;2]}|y|=|2+m|=m+2$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;2]}|y|+\max\limits_{[0;2]}|y|=6 \Leftrightarrow m-2+m+2=6 \Leftrightarrow m=3(t/m)$

TH 3: $2+m<0 \Leftrightarrow m<-2 \Rightarrow \min\limits_{[0;2]}|y|=|2+m|=-2-\text{m};\quad \max\limits_{[0;2]}|y|=|-2+m|=-(-2+\text{m})=2-m$

$\Rightarrow \min\limits_{[0;2]}|y|+\max\limits_{[0;2]}|y|=6 \Leftrightarrow -2-m+2-m=6 \Leftrightarrow m=-3(t/m)$.

Vậy có 2 số nguyên thỏa mãn.

Ví dụ mẫu 2: (Sở Phú Thọ 2020) Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2+m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-20;20]$ sao cho $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|<3\min\limits_{[0;2]}|f(x)|$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 63. **B.** 51. **C.** 195. **D.** 23.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^4-2x^2+m$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có: $f'(x)=4x^3-4x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

$f(1)=m-1;\ f(2)=m+8;\ f(0)=m$.

$\max\limits_{[0;2]} f(x)=m+8;\ \min\limits_{[0;2]} f(x)=m-1$.

+) Nếu $m-1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 1$ thì $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=m+8$, $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|=m-1$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|<3\min\limits_{[0;2]}|f(x)| \Leftrightarrow 8+m<3(m-1) \Leftrightarrow m>\dfrac{11}{2}$.

+) Nếu $m+8\le 0 \Leftrightarrow m\le -8$ thì $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=1-m$, $\min\limits_{[0;2]}|f(x)|=-m-8$.

Khi đó: $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|<3\min\limits_{[0;2]}|f(x)| \Leftrightarrow 1-m<3(-m-8) \Leftrightarrow m<-\dfrac{25}{2}$.

+) Nếu $(m-1)(m+8)<0 \Leftrightarrow -8<m<1$ thì

$\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=\max\{|m+8|,|m-1|\}=\max\{m+8,1-m\}>0; \min\limits_{[0;2]}|f(x)|=0$.

Khi đó, không thỏa điều kiện $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|<3\min\limits_{[0;2]}|f(x)|$.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{25}{2} \\ m>\dfrac{11}{2} \end{array}\right.$ kết hợp với $m\in[-20;20]$ ta có $m\in\left[-20;-\dfrac{25}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11}{2};20\right]$

Mà $m\in z\Rightarrow S=\{-20;-19;-18;....;-13;6;7;....,20\}$.

Tổng các phần tử của S bằng $6+7+8+9+10+11+12=63$.

Ví dụ mẫu 3: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để $\left|\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)\right|=2$.

A. -4. **B.** -2. **C.** -1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;3]$.

Với $m=-2$, hàm số trở thành $y=2\Rightarrow \max\limits_{[2;3]} f(x)=\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$ (không thỏa).

Với $m\neq -2$, ta có $y'=\dfrac{-2-m}{(x-1)^2}$.

Khi đó hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên $[2;3]$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\max\limits_{[2;3]} f(x)=f(2);\ \min\limits_{[2;3]} f(x)=f(3)\\ \max\limits_{[2;3]} f(x)=f(3);\ \min\limits_{[2;3]} f(x)=f(2)\end{array}\right.$.

Do đó: $\left|\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)\right|=\left|f(3)-f(2)\right|=\left|\dfrac{6+m}{2}-(4+m)\right|=\left|\dfrac{2+m}{2}\right|$.

Theo giả thiết $\left|\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)\right|=2\Leftrightarrow\left|\dfrac{2+m}{2}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-6\end{array}\right.$.

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: -4.

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2+m$, (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ sao cho $\max\limits_{[1;2]}|f(x)|+\min\limits_{[1;2]}|f(x)|\geq 10$. Số phần S là

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4-2x^2+m$, hàm số liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=4x^3-4x>0,\forall x\in\left(1;2\right)\Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn $\left[1;2\right]$,

do đó $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right)=m+8;\ \min\limits_{[1;2]} f\left(x\right)=m-1$.

TH 1: $m-1\ge 0\Rightarrow 1\le m\le 10$ thì $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=m+8;\min\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=m-1$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|\ge 10\Leftrightarrow m+8+m-1\ge 10\Rightarrow m\ge\dfrac{3}{2}\Rightarrow m\in\left\{2;3;4;...10\right\}$,

$\Rightarrow$ trường hợp này có 9 số nguyên.

TH 2: $m+8\le 0\Rightarrow -10\le m\le -8$ thì $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=-m+1;\min\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=-m-8$.

Khi đó: $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|\ge 10\Leftrightarrow -m+1-m-8\ge 10\Rightarrow -10\le m\le\dfrac{-17}{2}\Rightarrow m\in\left\{-10;-9\right\}$

$\Rightarrow$ trường hợp này có 2 số nguyên.

TH 3: $-8<m<1$, thì $\min\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=0;\ \max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases}-m+1 & khi\ -8<m\le\dfrac{-7}{2}\\ m+8 & khi\ \dfrac{-7}{2}<m<1\end{cases}$;

Do m là số nguyên nên: $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|+\min\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|\ge 10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m+1\ge 10,\ khi\ -8<m\le -4\\ m+8\ge 10, khi\ -4<m<1\end{array}\right.$;

$\Rightarrow$ không tồn tại m thỏa mãn.

Vậy số phần tử của tập S là 11.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-2x^2+m$, ($m$ là tham số thực). Biết $\max\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=p;\ \min\limits_{[1;2]}\left|f\left(x\right)\right|=q$ và S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên $m\in\left[-10;10\right]$ sao cho bộ ba số $p,q,19$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Số phần tử của tập S bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 21.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4-2x^2+m$, hàm số liên tục trên đoạn $\left[1;2\right]$.

Ta có: $f'(x)=4x^3-4x>0, \forall x\in(1;2)\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$,

do đó $\max\limits_{[1;2]} f(x)=m+8;\ \min\limits_{[1;2]} f(x)=m-1$, suy ra $q<p<19;\ \forall m\in[-10;10]$.

Hay YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} p+q>19 \\ p,q>0 \end{cases}$.

TH 1: $m-1>0\Rightarrow 1<m\le 10$, thì $p=m+8;\ q=m-1$.

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow p+q>19 \Leftrightarrow m+8+m-1>19\Rightarrow m>6\Rightarrow m\in\{7;8;9;10\}$,

$\Rightarrow$ trường hợp này có 4 số nguyên.

TH 2: $m+8<0\Rightarrow -10\le m<-8$ thì $p=-m+1;\ q=-m-8$.

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow p+q>19 \Leftrightarrow -m+1-m-8>19\Rightarrow m<-13$

$\Rightarrow$ trường hợp này không tồn tại $m\in[-10;10]$ thỏa mãn.

TH 3: $-8<m<1$, thì $q=0$; $\Rightarrow$ không thỏa mãn YCBT.

Vậy số phần tử của tập S là 4.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=x^3-x^2+x-m-2$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;3]}|f(x)|+\min\limits_{[0;3]}|f(x)|=16$. Tổng các phần tử của S là

A. 3. **B.** 17. **C.** 34. **D.** 31.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2+x-m-2$, trên đoạn $[0;3]$

ta có $f'(x)=3x^2-2x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(0)=-m-2;\ f(3)=-m+19$

Trường hợp 1: $(m+2)(m-19)\le 0 \Leftrightarrow -2\le m\le 19 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[0;3]}|f(x)|=0 \\ \max\limits_{[0;3]}|f(x)|=\max\{|m+2|,|m-19|\} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \max\limits_{[0;3]}|f(x)| = m+2,\ \text{khi } \dfrac{17}{2} \le m \le 19 \\ \max\limits_{[0;3]}|f(x)| = 19-m,\ \text{khi -2} \le \text{m} < \dfrac{17}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $\max\limits_{[0;3]}|f(x)| + \min\limits_{[0;3]}|f(x)| = 16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=16,\ \text{khi } \dfrac{17}{2} \le m \le 19 \\ 19-m=16,\ \text{khi } 0 \le \text{m} < \dfrac{17}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=14 \\ m=3 \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $(m+2)(m-19) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>19 \\ m<-2 \end{array}\right.$

Suy ra $\min\limits_{[0;3]}|f(x)| + \max\limits_{[0;3]}|f(x)| = |m+2| + |m-19| = |2m-17| = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{2}(KTM) \\ m = \dfrac{33}{2}(KTM) \end{array}\right.$

Vậy $S = \{3; 14\}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để $\min\limits_{[-1;\,2]} y + \max\limits_{[-1;\,2]} y = 20$ là

A. -10. **B.** -4. **C.** 20. **D.** -21.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + m$ trênđoạn $[-1; 2]$

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x;\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0;\ x=1;\ x=\dfrac{1}{2}$.

Ta có : $f(0) = m;\ f(1) = m;\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = m + \dfrac{1}{16};\ f(-1) = f(2) = m+4$.

Suy ra $\begin{cases} \max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(2) = m+4 \\ \min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(0) = f(1) = m \end{cases}$

TH1 : Nếu $m \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m+m+4=20 \end{cases} \Leftrightarrow m = 8$.

TH2 : Nếu $m \le -4 \Rightarrow \begin{cases} m \le -4 \\ -(m+4) - m = 20 \end{cases} \Leftrightarrow m = -12$.

TH3 : Nếu $-4 < m < 0 \Rightarrow \min\limits_{[-1;\,2]} y = 0;\ \max\limits_{[-1;\,2]} y = \max\left\{|m+4|, |m|\right\} = \max\left\{m+4, -m\right\}$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;\,2]} y + \max\limits_{[-1;\,2]} y < 4 < 0 + 20 = 20$ không thỏa mãn.

Vậy tổng các giá trị của m là -4.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x-m}{x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;2]}|f(x)| + 2\min\limits_{[0;2]}|f(x)| \ge 4$. Hỏi trong đoạn $[-30;30]$ tập S có bao nhiêu số nguyên?

A. 53. **B.** 52. **C.** 55. **D.** 54.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = \dfrac{4+m}{(x+2)^2}$

+ Nếu $m = -4$ thì $f(x) = 2$ thỏa mãn $\max\limits_{[0;2]}|f(x)| + 2\min\limits_{[0;2]}|f(x)| \ge 4$.

+ Xét $m \ne -4$. Ta có $f(0) = -\dfrac{m}{2};\ f(2) = \dfrac{4-m}{4}$.

* TH1: $\dfrac{-m}{2}\left(\dfrac{4-m}{4}\right) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$.

Khi đó $\min\limits_{[0;2]}|f(x)| = 0$ và $\max\limits_{[0;2]}|f(x)| = \dfrac{4-m}{4}$ hoặc $\max\limits_{[0;2]}|f(x)| = \dfrac{m}{2}$.

Theo giả thiết ta phải có $\left[\begin{array}{l} \dfrac{4-m}{4} \ge 4 \\ \dfrac{m}{2} \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -12 \\ m \ge 8 \end{array}\right.$ (loại).

- TH2:

+ Xét $-4 < m < 0$: hàm số $f(x)$ đồng biến, hơn nữa $f(0) = -\dfrac{m}{2} > 0;\ f(2) = \dfrac{4-m}{4} > 0$ nên

$$\max_{[0;2]}|f(x)| + 2\min_{[0;2]}|f(x)| \ge 4 \Leftrightarrow \frac{4-m}{4} + 2\left(-\frac{m}{2}\right) \ge 4 \Leftrightarrow m \le -\frac{12}{5}.$$

Vậy $-4<m\le -\frac{12}{5}\Rightarrow m=-3$..

+ Xét $m<-4$: hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến, hơn nữa $f\left(0\right)=-\frac{m}{2}>0;\ f\left(2\right)=\frac{4-m}{4}>0$

nên

$\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|+2\min\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|\ge 4\Leftrightarrow -\frac{m}{2}+2\left(\frac{4-m}{4}\right)\ge 4\Leftrightarrow m\le -2$. Vậy $m<-4$.

+ Xét $m>4$: hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến, hơn nữa $f\left(0\right)=-\frac{m}{2}<f\left(2\right)=\frac{4-m}{4}<0$ nên

$\max\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|+2\min\limits_{[0;2]}\left|f\left(x\right)\right|\ge 4\Leftrightarrow \frac{m}{2}+2\left(\frac{m-4}{4}\right)\ge 4\Leftrightarrow m\ge 6$. Vậy $m\ge 6$.

Tóm lại: $m\in\left(-\infty;\frac{-12}{5}\right]\cup\left[6;+\infty\right)$. Nên trong $\left[-30;30\right]$, tập S có 53 số nguyên.

Dạng 3: *Tìm tham số để GTLN của hàm số* $y=\left|f\left(x\right)+g\left(m\right)\right|$ *trên đoạn* $\left[a;b\right]$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Ghi nhớ:

- $\max\left\{\alpha;\beta\right\}\ge\frac{\alpha+\beta}{2}$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \alpha=\beta$.
- $\left|\alpha\right|+\left|\beta\right|\ge\left|\alpha+\beta\right|$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \alpha.\beta\ge 0$.

Cụ thể

- Bước 1: Tìm $\alpha=\max\limits_{[a;b]}f\left(x\right);\ \beta=\min\limits_{[a;b]}f\left(x\right)$.

- Bước 2: Gọi M là giá trị lớn nhất của $y=\left|f\left(x\right)+g\left(m\right)\right|$ thì

+)

$M=\max\left\{\left|\alpha+g\left(m\right)\right|;\left|\beta+g\left(m\right)\right|\right\}\ge\frac{\left|\alpha+g\left(m\right)\right|+\left|\beta+g\left(m\right)\right|}{2}=\frac{\left|\alpha+g\left(m\right)\right|+\left|-\beta-g\left(m\right)\right|}{2}$,

dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\left|\alpha+g\left(m\right)\right|=\left|\beta+g\left(m\right)\right|$.

+) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{\left|\alpha+g\left(m\right)\right|+\left|-\beta-g\left(m\right)\right|}{2}\ge\frac{\left|\alpha+g\left(m\right)-\beta-g\left(m\right)\right|}{2}=\frac{\left|\alpha-\beta\right|}{2}$,

dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\left[\alpha+g\left(m\right)\right]\left[-\beta-g\left(m\right)\right]\ge 0$.

- Bước 3: Kết luận $\min M = \dfrac{|\alpha-\beta|}{2}$ khi $g(m) = \dfrac{-\alpha-\beta}{2}$.

Ví dụ mẫu 1: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^2 + 2x$.

Ta có: $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-2;1)$.

$f(-2) = 0$; $f(1) = 3$; $f(-1) = -1$.

Do đó $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 3$; $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = -1$.

Suy ra: $\max\limits_{[-2;1]} y = \max\{|m-5|;|m-1|\} \geq \dfrac{|m-5| + |m-1|}{2} \geq \dfrac{|5-m+m-1|}{2} = 2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |m-5| = |m-1| \\ (5-m)(m-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3$ (thỏa mãn).

Ví dụ mẫu 2: Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|\sqrt{2x - x^2} - 3m + 4\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

A. $m = \dfrac{3}{2}$. **B.** $m = \dfrac{5}{3}$. **C.** $m = \dfrac{4}{3}$. **D.** $m = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = [0;2]$.

Đặt $f(x) = \sqrt{2x - x^2}, x \in D$, ta có $f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$f(0) = 0$; $f(2) = 0$; $f(1) = 1$.

Suy ra: $P=\max\limits_{D} y=\max\left\{|3m-4|;|3m-5|\right\}\ge\dfrac{|3m-4|+|3m-5|}{2}$

$\ge\dfrac{|5-3m+3m-4|}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}|3m-4|=|3m-5|\\(5-3m)(3m-4)\ge 0\end{cases}\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn).

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là nhỏ nhất khi $m=\dfrac{3}{2}$.

Bài tập tương tự

Câu 1. Để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

A. $[-1;0]$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$. **D.** $\left(\dfrac{-3}{2};-1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x^3-3x-1+2m$ trên đoạn $[0;2]$.

$f'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[0;2]\\x=1\in[0;2]\end{array}\right.$.

$f(0)=-1+2m$, $f(1)=-3+2m$, $f(2)=1+2m$

nên ta có $\max\limits_{[0;2]} y=\max\left\{|2m-3|;|2m+1|\right\}$.

Ta có: $\max\limits_{[-3;1]} y\ge\dfrac{|2m+1|+|2m-3|}{2}\ge\dfrac{|2m+1+3-2m|}{2}=2.$

Dấu bằng khi $m=2.$

Câu 2. Để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-12x+m+1\right|$ trên đoạn $[1;3]$ đạt nhỏ nhất. Giá trị của m bằng

A. $\dfrac{23}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $-\dfrac{23}{2}$. **D.** $-\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[1;3]$

+) Xét $g(x)=x^3-12x+m+1$ trên $[1;3]$

$g'(x)=3x^2-12$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & (n) \\ x=-2 & (l) \end{array}\right.$

+) Ta có:

$f(1)=|m-10|$; $f(2)=|m-15|$; $f(3)=|m-8|$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[1;3]} f(x)=M=\max\left\{|m-8|;|m-15|\right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} M\geq |m-8| \\ M\geq |m-15| \end{cases}$

$\Rightarrow 2M\geq |m-8|+|m-15|=|m-8|+|15-m|\geq |m-8+15-m|\geq 7$

$\Rightarrow M\geq \dfrac{7}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |m-8|=|m-15| \\ (m-8)(15-m)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{23}{2}$.

Vậy $m=\dfrac{23}{2}$.

43 Nguyễn Chí Thanh, Quận Ba Đình, Hà Nội
ĐT: + 84 24 62831777 Fax: + 84 24 62831777
Email: vtv7@vtv.vn Website: www.vtv7.gov.vn